Auch Zahlen brauchen manchmal ein Alibi

51. Berliner Landesolympiade

Mathematikolympiaden in Berlin e.V.
http://mathematikolympiaden-berlin.de

Wir danken allen Spendern und Unterstützern der Berliner Mathematikolympiaden

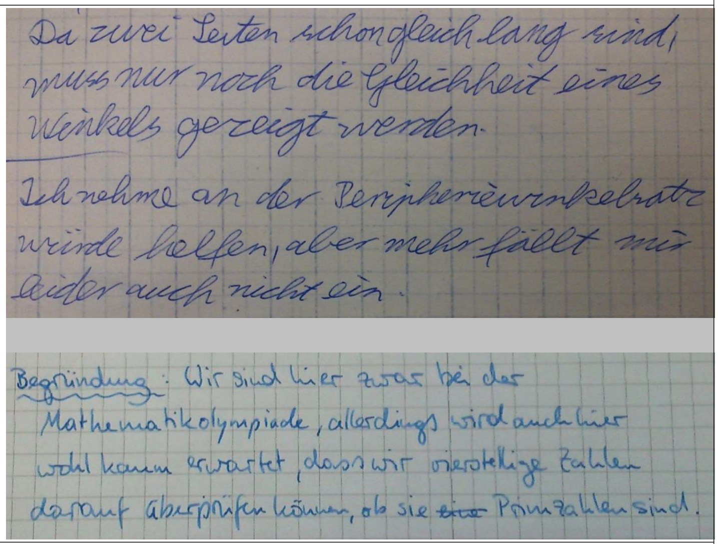
Mathematikolympiaden in Berlin e.V.
http://mathematikolympiaden-berlin.de

Verein Mathematikolympiaden in Berlin e.V.
Institut für Mathematik, Humboldt-Universität zu Berlin,
Unter den Linden 6, 10099 Berlin
Für Spenden stellen wir entsprechende Bescheinigungen aus

Der Verein „Mathematikolympiaden in Berlin e.V.“ wurde im März 1995 gegründet.

Er wird unterstützt von der Heinrich-Hertz-Oberschule und dem Lessing-Gymnasium als den ausrichtenden Schulen, den Lehrerinnen und Lehrern, die in schulischen Wettbewerben ihre Besten auswählen und von vielen Korrektoren, die dafür sorgen, dass am Sonntag nach der Olympiade alle Schülerinnen und Schüler ihre Arbeit in die Hand bekommen.

Wir benötigen mehr Hilfe und freuen uns über jeden neuen Unterstützer.



Das Alibi für Zahlen

Eine Zahl behauptet, keine Primzahl zu sein.

Wie kann das beweisen?

Wir brauchen einen Zeugen!

561: Ich bin keine Primzahl! 3 ist mein Zeuge.

Das Alibi für Zahlen

561: Ich bin keine Primzahl! 3 ist mein Zeuge.

11 ist auch ein Zeuge –
aber einer reicht uns.

Die Suche nach Zeugen

Wenn eine Zahl keine Primzahl ist, findet man immer einen zuverlässigen Zeugen:

einen Teiler.

Diese Suche nach diesen Teiler-Zeugen dauert aber oft sehr lange.

Die 5-te Fermatsche Zahl

$F_5 = 2^{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} + 1$

4 294 967 297 ist keine Primzahl!

$F_{10} = 2^{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} + 1 =$
179769313486231590772930519078902473361797697894230657273430081157732675805500963132708477322407536021120113879871393357658789768814416622492847430639474124377767893424865485276302219601246094119453082952085005768838150682342462881473913110540827237163350510684586298239947245938479716304835356329624224137217

übrigens auch nicht.

Die Primzahl-Schnüre

Betrachtet man Schnüre aus *a* verschieden farbigen Perlen der Länge *p*, so gibt es insgesamt

$$a^p$$

verschiedene Perlenschnüre.

Von diesen sind *a* einfarbig.

9

Die Primzahl-Ketten

Schließt man die nicht-einfarbigen Perlschnüre zu Ketten, dann gehören zu einer Kette immer *p* Perlenschnüre.

Man kann ja jede Kette an *p* verschiedenen Stellen aufschneiden.

Weil *p* eine Primzahl ist und keine Teiler hat, sind auch alle Schnüre verschieden – kein Muster kann sich wiederholen.

10

Die Primzahl-Ketten

Die $a^p - a$ verschiedenen Perlschnüre kann man zu Gruppen zu je *p* Stück zusammen fassen, die zu einer Kette gehören.

$$p \text{ teilt } a^p - a = (a^{p-1} - 1)\cdot a$$

11

Die Nicht-Teiler-Zeugen

Weil für eine Primzahl *p* und eine Zahl *a*, die *p* nicht teilt, immer

$$(a^{p-1} - 1) \text{ durch } p$$

teilbar ist, findet man immer einen Zeugen, wenn der Rest der Division von a^{p-1} durch *p* nicht 1 ist.

12

Der Zeuge für 2701

$3^{2700} - 1$ ist leider durch 2701 teilbar

Man muss aber nicht aufgeben, denn wenn 2701 eine Primzahl wäre, müsste ein Faktor

$(3^{1350} + 1)(3^{1350} - 1)$ durch 2701 teilbar sein

3^{1350} ergibt bei Division durch 2701 jedoch

2554

13

Es gibt sehr viele Zeugen

Für Primzahlen gibt es keine Zeugen.

Für alle anderen Zahlen sind mindestens 75% ein Nicht-Teiler-Zeuge.

14

Es gibt sehr viele Zeugen

Für sehr große Zahlen sind fast alle Zahlen Zeugen.

Bei einer 500-stelligen Zahl ist die Chance, zufällig einen Zeugen zu treffen, größer als 99,9999999999999999999999999999992…

15

Wie findet man einen Teiler?

Die Suche nach einem Teiler-Zeugen ist dagegen schwer.

Bei 4-stelligen Zahlen wie 2701 kann man folgenden Trick verwenden:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

16

Die Teiler von 2701

$a^2 - (a - b)(a + b) = b^2$

$51^2 - 2701 = 2601 - 2701$

$52^2 - 2701 = 2704 - 2701 = 3$

$53^2 - 2701 = 2809 - 2701 = 108$

$54^2 - 2701 = 2916 - 2701 = 215$

$55^2 - 2701 = 3025 - 2701 = 324 = 18^2$

Die Teiler von 2701

$a^2 - (a - b)(a + b) = b^2$

$55^2 - 2701 = 3025 - 2701 = 324 = 18^2$

$55^2 - (55 - 18)(55 + 18) = 18^2$

$2701 = 37 \cdot 73$

Die 5-te Fermatsche Zahl

$F_5 = 2^{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2} + 1$ ist durch 641 teilbar

$F_{10} = 2^{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2} + 1$ durch 45592577.

Begründung: Wir sind hier zwar bei der Mathematikolympiade, allerdings wird auch hier wohl kaum erwartet, dass wir vierstellige Zahlen darauf überprüfen können, ob sie ~~eine~~ Primzahlen sind.

Gerade, weil wir an der Mathematikolympiade teilnehmen, können wir auch vierstellige Zahlen überprüfen und einen Zeugen finden, der einer zerlegbaren Zahl ein Alibi gibt.

Wo sind die Punkte?

den 12.$_3$ März 39

Im Datum! Wer (10a+b) Punkte bekam, hat als Datum den **(b+3)$_a$ März**.

den 6.$_0$ März 3